Міністерство освіти і науки України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXII Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

1 тур

15 січня 2017 року

*«Якщо шлях тривалий, не дивуйся,
заради великої мети треба його пройти»*
Платон

7 клас

1. На дошці записують послідовність цифр за таким правилом: якщо останні цифри, записані на дошці, дорівнюють a та b, то за ними записується остання цифра добутку ab. Наприклад, якщо спочатку записані $1; 8$, то далі послідовність продовжується таким чином: $1; 8; 8; 4; \ldots$. Знайдіть 2017-ту виписану цифру послідовності, якщо вона почалася з цифр $3; 4$.

Відповідь: 8.
Розв'язання. Треба виписати послідовність цифр, доки вона не почне зациклюватись (повторюватись). Повторюваність починається з моменту, коли деяка пара цифр повторилася. Оскільки усіх таких пар скінченна кількість, то рано чи пізно повторюваність відбудеться обов'язково.

$$3; 4; 2; 8; 6; 8; 8; 4; 2; \ldots$$

Як бачимо, повторюються періодично шість цифр $4; 2; 8; 6; 8; 8$. Крім того перша цифра 3 знаходиться поза періодом. Таким чином, цифра 4 займає в цій послідовності номери 2-й, 8-й, 14-й, …, 2012-й. Тоді 2017-ю цифрою в цій послідовності є цифра 8.

2. У компанії друзів кожному подобалася або математика, або інформатика. Відомо, що ті, кому подобалась математика, мали середній вік 15 років, а ті, кому подобалась інформатика, мали середній вік 25 років. Одного дня Андрійкові перестала подобатись інформатика, та стала подобатись математика. Внаслідок цього середній вік тих, кому подобалась інформатика, а також тих, кому подобалась математика, став більшим на 1. З'ясуйте, скільки всього було друзів у цій компанії та наведіть відповідний приклад, що така ситуація можлива.

Відповідь: 10.
Розв'язання. Нехай тих, хто полюбляв математику, було n, а тих, хто полюбляв інформатику, було m. Тоді сумарний вік усіх друзів можемо обчислити двома способами:

$$N = 15n + 25m = 16(n+1) + 26(m-1) \Rightarrow n + m = 10.$$

Покажемо, що така ситуація можлива. Дійсно, нехай було 4 математики віком по 15 років, один інформатик віком 20 років, а ще 5 інформатиків віком 26 років. Тоді спочатку середній вік математиків був 15, а інформатиків $\frac{1}{6}(20 + 26 \cdot 5) = 25$. Коли той, кому було 20 років перейшов до математиків, то середній вік інформатиків став 26, а математиків $\frac{1}{5}(20 + 15 \cdot 4) = 16$.

3. Прямокутник з периметром 2016 розрізаний на чотири прямокутники I, II, III, IV, а також дві області A та B (рис. 1). Периметри прямокутників відносяться як $P_I : P_{II} : P_{III} : P_{IV} = 1:3:5:7$. Чому дорівнюють суми периметрів фігур A та B?

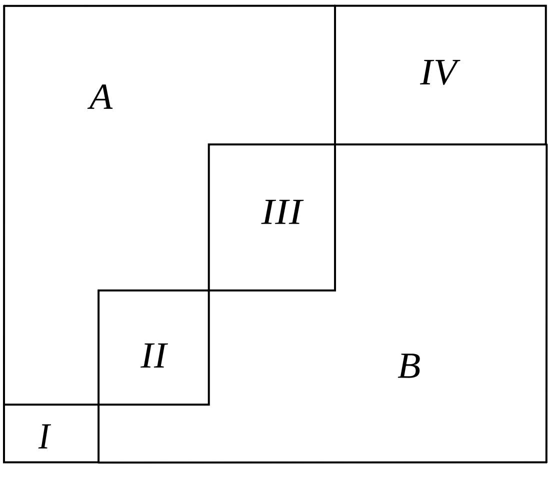

Рис. 1

Відповідь: 3024.
Розв'язання. Розглянемо рис. 1. Сума периметрів прямокутників дорівнює периметру зовнішнього прямокутника, в чому неважко переконатися, якщо подивитися на їх складові частини. Тоді

$$P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} = 2016.$$

Позначимо через $x = P_I$. Тоді остання рівність запишеться як $16x = 2016$ або $x = 126$.

Сумарно периметри $P_A + P_B = 2016 + P_{II} + P_{III}$. Звідси знаходимо, що

$$P_A + P_B = 2016 + 8x = 3024.$$

4. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В якійсь момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Чи зможе наприкінці чемпіонату посісти перше місце команда, що у той момент була на 8-му місці?

***Відповідь*:** не могла.
***Розв'язання*.** Дивись розв'язання **задачі 11.4**.

3.1. Три однакових прямокутники $ABCD$, $MNPQ$ та $BPYX$ розташовані так, як це показане на рис. 2. Прямокутник $NCGF$ спільний для усіх цих трьох прямокутників і має площу, що дорівнює 17. Визначіть довжини сторін однакових прямокутників, якщо відомо, що вони є натуральними числами.

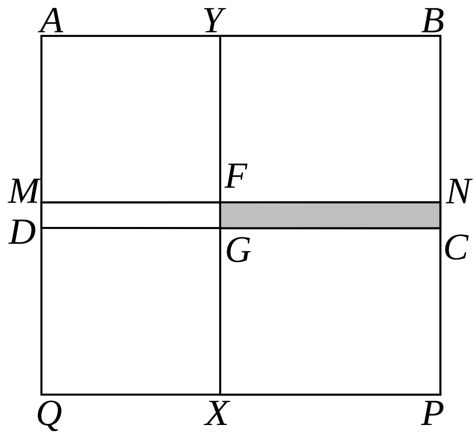

Рис. 2

***Відповідь*:** 17 та 33.
***Розв'язання*.** Позначимо сторони однакових прямокутників як $a \ge b$. Тоді з рис. 2 знайдемо довжини деяких з відрізків, що утворилися внаслідок перетину прямокутників.

$$AB = BP = a,\ BY = BC = PN = b,\ BN = CP = a - b,\ CN = b - (a - b) = 2b - a.$$

Звідси $S_{FNCG} = b(2b - a) = 17$. Оскільки 17 – просте число, то можливі лише два випадки:

Випадок 1. $b = 1;\ 2b - a = 17$, що неможливо.

Випадок 2. $b = 17;\ 2b - a = 1 \Rightarrow a = 33$.

4.1. Задача 8.2 *а)*.

8 клас

1. По колу розставлені 8 кружечків. Чи можна записати у цих кружечках числа $1; 2; \ldots; 8$ таким чином, щоб сума чисел, що записані у будь-яких двох сусідніх кружечках, не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7?

***Відповідь*:** не можна.
***Розв'язання*.** Випишемо ті пари чисел, які можуть бути сусідніми:

$$(1; 3),\ (1; 7),\ (2; 6),\ (3; 5),\ (3; 8),\ (4; 7),\ (5; 6),\ (5; 8),\ (6; 7).$$

Як бачимо, поряд з числом 2 може стояти тільки число 6, тобто якби шукана розстановка чисел існувала, то у 2 мало б бути два різних сусіди, а їх не існує.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває?

б) це був чемпіонат з гандболу, де за перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується?

Відповідь*: *а) після 7 турів, ***б)*** після 4 турів.

Розв'язання*. *б) Дивись розв'язання **задачі 11.4**.

а) Оскільки найменша сумарна кількість очок, що могли набрати команди має розподіл – 0 очок; 1 очко; …; 7 очок, то зрозуміло, що таке могло трапитись не раніше як по завершенні чемпіонату, тобто після 7 турів, бо інакше набрати 7 очок не можливо. Приклад, що таке можливо – очевидний, кожна команда, що посіла в підсумковій таблиці вище місце виграла у команди, що посіла місце нижче.

3. Добуток трьох чисел $\overline{abc}\cdot\overline{ab}\cdot a = 3****7$ є шестицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 7. Цифри a, b, c не обов'язково різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

***Відповідь*:** 376607, 353367.

***Розв'язання*.** Оскільки добуток є непарним числом, то усі цифри непарні і не дорівнюють 5. Якщо розглянути добутки $911\cdot 91\cdot 9 = 746109 > 399997$ та $399\cdot 39\cdot 3 = 46683 < 300007$, то зрозуміло, що $a = 7$. Добуток $abc = 7bc$ закінчується цифрою 7.

Можливі варіанти: (b, c): $(9; 9)$, $(7; 3)$, $(3; 7)$, $(1; 1)$.

Перевіримо ці чотири числа:

$$799\cdot 79\cdot 7 = 441847,\ 773\cdot 77\cdot 7 = 416647,\ 737\cdot 73\cdot 7 = 376607 \text{ та } 711\cdot 71\cdot 7 = 353367.$$

4. На сторонах BC та CD квадрату $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $\angle MAN = 45°$. На відрізку MN, як на діаметрі, побудували коло w, яке перетинає відрізки AM та AN у точках P та Q відповідно. Доведіть, що точки B, P та Q лежать на одній прямій.

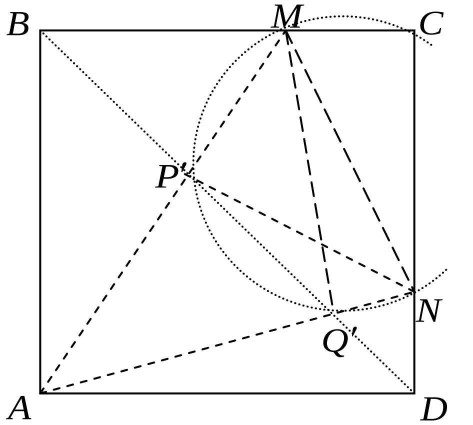

Рис. 3

***Розв'язання*.** Доведемо, що точки P та Q лежать на діагоналі квадрату BD. Нехай відрізки AM та AN перетинають діагональ BD у точках P' та Q' відповідно (рис. 3). Оскільки $\angle Q'AM = \angle Q'BM = 45°$, то чотирикутник $Q'ABM$ -- вписаний. Тоді $\angle Q'MA = \angle Q'BA = 45°$. Тому у $\Delta Q'AM$ два кути по $45°$, тому $\angle AQ'M = 90°$, звідки $\angle NQ'M = 90°$, тобто точка Q' лежить і на діагоналі BD, і на колі з діаметром MN, звідки $Q = Q'$. Аналогічно, з умови $\angle NAP' = \angle NDP' = 45°$ випливає, що $NDAP'$ вписаний, і отримаємо що точка P' лежить і на діагоналі BD, і на колі з діаметром MN, звідки $P = P'$.

5. Знайдіть значення $a+b$, якщо дійсні числа $a,\ b$ задовольняють умови:

$$a^3+12a^2+49a+69=0 \text{ та } b^3-9b^2+28b-31=0.$$

Відповідь: $a+b=-1$.

Розв'язання. Покладемо $x=a+4$, та $y=b-3$, звідси

$$a^3+12a^2+49a+69=(a^3+12a^2+48a+64)+(a+4)+1=x^3+x+1=0,$$

$$b^3-9b^2+28b-31=(b^3-9b^2+27b-27)+(b-3)-1=y^3+y-1=0 \Rightarrow$$

$$(x^3+x+1)+(y^3+y-1)=(x^3+y^3)+(x+y)=(x+y)(x^2+y^2-xy+1)=0.$$

Оскільки другий множник нулю не дорівнює, що випливає, наприклад, з таких перетворень:

$$x^2+y^2-xy+1=(x-\tfrac{1}{2}y)^2+\tfrac{3}{4}y^2+1>0.$$

Тому $x+y=0 \Rightarrow a+4+b-3=0 \Rightarrow a+b=-1$.

4.1. У трапеції $ABCD$ з основами AD та BC бісектриса кута $\angle DAB$ перетинає бісектриси кутів $\angle ABC$ та $\angle CDA$ у точках P та S відповідно, а бісектриса кута $\angle BCD$ перетинає бісектриси кутів $\angle ABC$ та $\angle CDA$ у точках Q та R відповідно. Доведіть, що якщо $PS \parallel RQ$, то $AB=CD$.

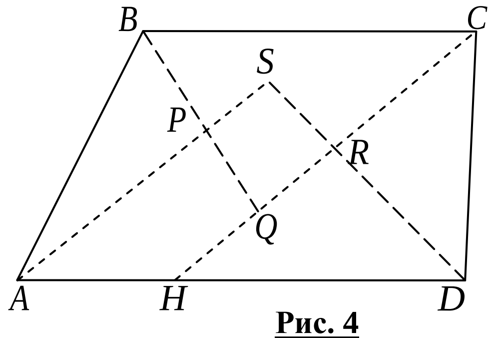

Рис. 4

Розв'язання. Позначимо точку перетину прямих AD та CQ через H (рис. 4). Оскільки

$$\tfrac{1}{2}\angle BAD=\angle SAD=\angle CHD \text{ та}$$

$$\angle CHD=\angle HBC=\tfrac{1}{2}\angle DCB.$$

Тоді $\angle BAD+\angle ADC=\angle DCB+\angle ADC=180^\circ$.

З умови $\angle BAD+\angle ADC=180^\circ$ випливає, що $AB \parallel CD$, тому $ABCD$ -- паралелограм. Звідки й $AB=CD$.

5.1. Знайдіть усі пари цілих чисел $(a,\ b)$, які задовольняють умову:

$$a^2+b^2=a+b+ab.$$

Відповідь: $(a,\ b)$: $(2;\ 2)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(1;\ 0)$, $(2;\ 1)$ та $(0;\ 1)$.

Розв'язання. Перепишемо рівність таким чином:

$$2a^2+2b^2-2a-2b-2ab=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=2.$$

Сума квадратів трьох цілих чисел дорівнює 2. Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. $a-b=0;\ |a-1|=|b-1|=1$. Тоді зрозуміло, що розв'язками є такі пари чисел $(a,\ b)$: $(2;\ 2)$ та $(0;\ 0)$.

Випадок 2. $a-1=0;\ |a-b|=|b-1|=1$. Розв'язками є такі пари чисел $(a,\ b)$: $(1;\ 2)$ та $(1;\ 0)$.

Випадок 3. $b-1=0;\ |a-b|=|a-1|=1$. Розв'язками є такі пари чисел $(a,\ b)$: $(2;\ 1)$ та $(0;\ 1)$.

9 клас

1. Знайдіть найбільший спільний дільник набору з 2017 таких чисел:

$$2017+1,\ 2017^2+1,\ 2017^3+1,\ \ldots,\ 2017^{2017}+1.$$

(Леонід Бедрадюк)

Відповідь: 2.

Розв'язання. Оскільки вони усі парні, то НСД цих чисел, який позначимо через $d \ge 2$. Покажемо, що насправді $d = 2$. Це можна зробити простим обчисленням чисел $2017+1$ і 2017^2+1 та пошуком їх спільного дільника.
Але простіше та швидше зробити таким чином. Зрозуміло, що d ділить різницю цих чисел, а тому є дільником числа $(2017^2+1)-(2017+1) = 2017 \cdot 2016$. Але числа $2017+1 = 2018$ та 2016 очевидно, бо їх різниця дорівнює 2, мають єдиний спільний дільник – це число 2, що й завершує доведення.

2. Задача 7.4.

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x^2+1)y = z^2+1, \\ (y^2+1)z = x^2+1, \\ (z^2+1)x = y^2+1. \end{cases}$$

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $x = y = z = 1$.
Розв'язання. З умов задачі очевидно, що усі три змінні додатні. Перемножимо ці рівняння і одержимо, що

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)xyz = (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1),$$

Звідки $xyz = 1$. Нехай, наприклад, $x \ge \max\{y, z\}$. Зрозуміло, що тоді $x \ge 1$.
Якщо $x = 1$, то маємо, що тоді повинно бути $x = y = z = 1$ і це очевидно розв'язок.
Якщо $x > 1$, то з другого рівняння $z = \frac{x^2+1}{y^2+1} \ge 1$, а з третього $x = \frac{y^2+1}{z^2+1} > 1$, звідки $y > z$. Але тоді маємо ланцюг нерівностей $x \ge y > z \ge 1$, які призводять до суперечності з умовою $xyz = 1$.

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі $0; 1; \ldots; 9$. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється пятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Андрій перемагає у цій грі, якщо число, яке утворилося у нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олеся. Кожен з гравців прагне перемогти. Хто за таких умов може забезпечити собі перемогу?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: Олеся.
Розв'язання. Стратегія Олесі така – вона вибирає кожним своїм ходом парні числа у порядку спадання. Якщо при цьому Андрій за перші чотири ходи принаймні раз вибере також парну цифру, то своїм останнім ходом йому доведеться вибирати непарну цифру, а тому ця цифра у його п'ятицифровому числі стане останньою і число буде непарним, тому не буде ділитися на 6.
Таким чином Андрій має вибирати перші чотири ходи поспіль непарні цифри. Тому Олеся витягне за перші три ходи цифри 8, 6 та 4. Перед своїм четвертим ходом Олеся дивиться на остачу при діленні на 3 чотирицифрового числа, що має Андрій. Якщо ця остача дорівнює 0, то Олеся забирає цифру 0 своїм четвертим ходом. Тому Андрієві, щоб отримати парне число треба брати цифру 2 -- єдину парну цифру, що залишилася. Але тоді число не буде ділитися на 3. Якщо у Андрія остача дорівнює ± 1, то Олеся забирає четвертим ходом цифру 2. Андрій має обрати парну цифру 0, що лишилася, але за таких умов число не ділитиметься на 3.

5. У трикутнику ABC відмічено центр вписаного кола I та центр I_A зовні вписаного кола, що дотикається сторони BC. Нехай точка M – середина сторони BC, а точка N – середина дуги BAC описаного кола ΔABC. Точка T симетрична точці N відносно точки A. Доведіть, що точки I_A, M, I, T лежать на одному колі.

(Данило Хілько)

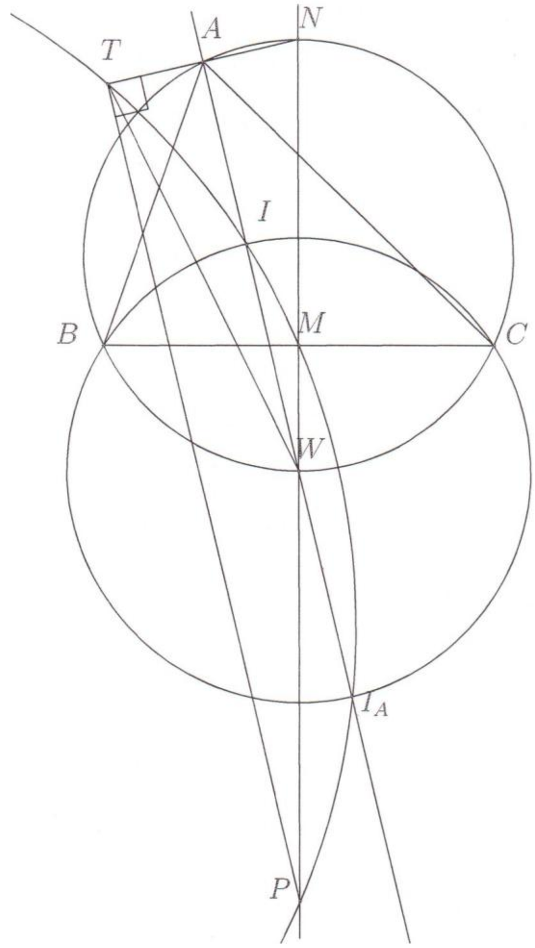

Рис. 5

Розв'язання Позначимо через W – середину дуги BC описаного кола, що не містить точку A, тоді за відомою теоремою про тризуб $BW = CW = IW = I_AW$. Розглянемо точку P, що симетрична точці N відносно W (рис. 5). Тоді з рівностей

$$IW \cdot I_AW = BW^2 = WM \cdot WN = WM \cdot WP,$$

випливає, що точки I, M, I_A, P лежать на одному колі. Крім того, як відомо, AN – бісектриса зовнішнього кута A, тому $\angle NAW = 90°$. Оскільки $NA = AT$, то у ΔTWN відрізок WA одночасно і медіана, і висота, тобто він рівнобедрений, звідки $WP = WN = WT$, а також $\angle TWA = \angle AWN = \angle PWI_A$. Це означає, що точки T і P симетричні відносно серединного перпендикуляра до відрізку I_AI. Отже точка T належить описаному колу ΔI_AIP, якому належить і точка M.

4.1. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі $0; 1; \ldots; 9$. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється п'ятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Перемагає той, у кого число, що утворилося, ділиться націло на 9. Якщо у обох число ділиться на 9, або у обох не ділиться на 9, то вважається, що гра завершилась внічию. Кожен з гравців прагне перемогти. Чи може за таких умов хтось з гравців забезпечити собі перемогу?

***Відповідь*:** гра завжди закінчиться внічию.

***Розв'язання*.** Сума усіх заданих цифр $0+1+\ldots+9=45$ кратна 9. Тому сума цифр числа A, що утворилося у Андрія, та числа O, що утворилося у Олесі, дорівнює 45. Таким чином, якщо число A ділиться на 9, то його сума цифр кратна 9, але тоді і Олесине число O так само має суму цифр, що кратна 9, а тому також ділиться на 9. Аналогічно, якщо число A не ділиться на 9, то і число O так само не ділиться на 9.

5.1. У трикутнику ABC проведені медіани BB_1 та CC_1, що перетинаються в точці M. Доведіть, що в чотирикутник AC_1MB_1 можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AB = AC$.

***Розв'язання*.** Якщо $AB = AC$, то очевидно, що чотирикутник AB_1MC_1 симетричний, а тому описаний навколо кола (рис. 6).

Якщо навпаки, то з описаності чотирикутника AB_1MC_1 випливає рівність $AB_1+MC_1=AC_1+MB_1$. У стандартних позначенням матимемо, що

$$\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}m_c=\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{3}m_b. \qquad \textbf{(1)}$$

Щоб далі не використовувати довжини медіан через сторони, застосуємо такі міркування. Оскільки $S_{ABB_1}=S_{CCB_1}=\tfrac{1}{2}S_{ABC}$. Для цих трикутників рівні вписані кола, то в них рівні периметри, тому

$$\tfrac{1}{2}b+m_b+c=\tfrac{1}{2}c+m_c+b \iff$$

$$m_b+\tfrac{1}{2}c=m_c+\tfrac{1}{2}b. \qquad \textbf{(2)}$$

Далі можна з (1) та (2) одразу отримати $m_b=m_c$, звідки $c=b$.

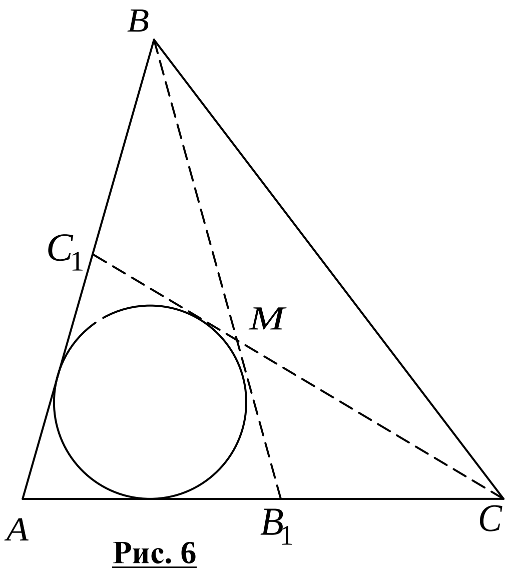

Рис. 6

10 клас

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

Відповідь: 975863142.
Розв'язання. Зрозуміло, що серед цифр може не бути задіяна одна з цифр, що кратна 3, тобто 0, 3, 6 або 9. Спробуємо без умови подільності на 3 побудувати перші цифри шуканого найбільшого числа: 97586 – очевидні перші п'ять цифр, більше яких знайти неможливо.
Якщо далі використати максимально можливу цифру з тих, що лишилися, тобто 4 і мати початок числа як 975864, то ми маємо не використати цифру 3 чи 0. Але тоді на три останні позиції розставити цифри, що лишилися, тобто $3; 2; 1$ чи $2; 1; 0$, без порушення умов не можливо.
Таким чином, після наведених перших п'яти цифр може стояти цифра 3 і початок числа є 975863. Тоді, відсутньою має бути цифра 0, а цифри, що лишилися $4; 2; 1$ можна розставити належним чином. Щоб число було максимальним це слід зробити так: 975863142.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває.

б) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ***а)*** після 7 турів, ***б)*** після 3 турів.
Розв'язання. ***а)*** **Задача 8.2**.
б) Оскільки найменша сумарна кількість очок, що можуть набрати команди, якщо усі набрали їх різну кількість, дорівнює $0+1+\ldots+7=28$. За 2 тури максимум зможуть набрати усі команди

разом $2\cdot 3\cdot 4=24$ очки. Тому має пройти не менше 3-х турів, відповідний приклад показаний на рис. 7.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	O
I	**XX**			**3**			**3**	**3**	**9**
II		**XX**		**1**			**3**	**3**	**7**
III			**XX**		**1**	**1**		**3**	**5**
IV	**0**	**1**		**XX**		**3**			**4**
V			**1**		**XX**	**1**	**1**		**3**
VI			**1**	**0**	**1**	**XX**			**2**
VII	**0**	**0**			**1**		**XX**		**1**
VIII	**0**	**0**	**0**					**XX**	**0**

Рис. 7

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC, а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM. Доведіть, що $AB=AH$.

(Данило Хілько)

Розв'язання. З властивостей прямокутного трикутника ΔMCH маємо (рис. 8), що $MC^2=MH\cdot MD$, звідки, з урахуванням $BM=MC$, отримуємо $BM^2=MH\cdot MD$. Тоді $\Delta BMH\sim\Delta BMD$, а тому $\angle MBH\sim\angle BDM$. Звідси описане коло трикутника ΔBHD дотикається до прямої BC. Тоді це коло також дотикається до CD, бо $BC=CD$. Отже, центр цього кола лежить на перпендикулярах в точці B до прямої BC і в точці D до прямої CD, тобто на прямих BA і DA відповідно. Звідси центр цього кола -- точка A. Отже, $AB=AD=AH$, що й треба було довести.

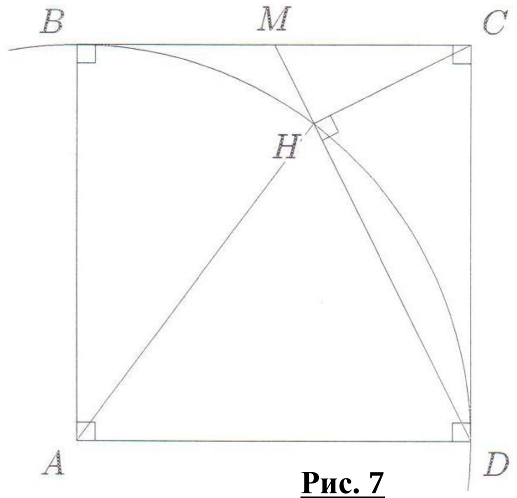

Рис. 7

4. Задача 9.4.

5. Для довільних додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\ge\frac{(3x-y-z)^2}{2(x+y+z)}.$$

(Олесь Добосевич)

Розв'язання. Розглянемо такі рівності:

$$(2x-y-z)+(2y-z-x)+(2z-x-y)=0\Leftrightarrow$$

$$\big(x-(y+z-x)\big)+\big(y-(z+x-y)\big)+\big(z-(x+y-z)\big)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-(y+z-x))(y+z)}{y+z}+\frac{(y-(z+x-y))(z+x)}{z+x}+\frac{(z-(x+y-z))(x+y)}{x+y}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-(y+z-x))(x+(y+z-x))}{y+z}+\frac{(y-(z+x-y))(y+(z+x-y))}{z+x}+\frac{(z-(x+y-z))(z+(x+y-z))}{x+y}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{y^2-(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{z^2-(x+y-z)^2}{x+y}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{x+z}+\frac{(x+y-z)^2}{y+x}.$$

З нерівність Коші-Буняковського маємо, що

$$\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{x+z}+\frac{(x+y-z)^2}{y+x}\ge\frac{\big(|x-y-z|+|x+z-y|+|x+y-z|\big)^2}{2(x+y+z)}\ge$$

$$\ge\frac{(3x-y-z)^2}{2(x+y+z)},$$

оскільки $\forall a,b,c$ виконується нерівність: $|a|+|b|+|c|\ge|a+b+c|$.

Альтернативне розв'язання. Внаслідок однорідності рівняння можемо вважати, що $x+y+z=1$. Тоді наша нерівність переписується таким чином:

$$\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+\geq\frac{(4x-1)^2}{2}.$$

Спочатку покажемо, що

$$\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x^2}{1-x}+\frac{(y+z)^2}{2x+y+z}=\frac{x^2}{1-x}+\frac{(1-x)^2}{1+x}.$$

Тепер треба показати, що $\frac{x^2}{1-x}+\frac{(1-x)^2}{1+x}\geq\frac{(4x-1)^2}{2}$. Це доводиться такими перетвореннями:

$$2x^2(1+x)+2(1-x)^3\geq(4x-1)^2(1-x^2)\ \Leftrightarrow\ 16x^4-8x^3-7x^2+2x+1\geq0\ \Leftrightarrow$$
$$(4x^2-x-1)^2\geq0,$$

що й треба було довести.

4.1. Знайдіть двоцифрове натуральне число $N=\overline{ab}$, $b\neq0$, для якого у послідовності чисел $m_n=\overline{a\underbrace{00\ldots0}_{n}b}$

а) усі члени кратні N;
б) жодний член не кратний N;
в) є нескінченна кількість членів, що кратні N, а також, нескінченна кількість членів, що не кратні N.

Відповідь: наприклад, такі числа *а)* 15, *б)* 12, *в)* 11.

Розв'язання. *а)* Для $N=15$ зрозуміло, що кожне з чисел $\overline{100\ldots05}$ ділиться на 5 та на 3.

б) Для $N=12$ зрозуміло, що кожне з чисел $\overline{100\ldots02}$ не ділиться на 4.

в) Для $N=11$ не важко зрозуміти з ознаки подільності на 11, що кожне з чисел $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{2k}1}$ ділиться на 11, а кожне з чисел $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{2k+1}1}$ не ділиться на 11.

5.1. Для невід'ємних чисел $x,\ y,\ z$ доведіть нерівність:

$$3(x^2+y+z)(x+y^2+z)(x+y+z^2)\geq(x+y+z)^4.$$

(Вадим Митрофанов)

Розв'язання. Спочатку застосуємо нерівність Шварца для наборів $(1;1;1)$ та $(x^2;\ y;\ z)$:

$$3(x^2+y+z)=(1^2+1^2+1^2)(x^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2)\geq(x+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2.$$

Далі для наборів $(x;\ y^2;\ z)$ та $(x;\ y;\ z^2)$:

$$((\sqrt{x})^2+y^2+(\sqrt{z})^2)((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+z^2)\geq(x+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2.$$

Таким чином ми маємо для лівої частини нерівності таку оцінку:

$$3(x^2+y+z)(x+y^2+z)(x+y+z^2)\geq((x+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}))^2.$$

І на завершення застосуємо нерівність Шварца для наборів $(x;\ \sqrt{y};\ \sqrt{z})$ та $(x;\ y\sqrt{y};\ z\sqrt{z})$:

$$((\sqrt{x})^2+(\sqrt{\sqrt{y}})^2+(\sqrt{\sqrt{y}})^2)((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y\sqrt{y}})^2+(\sqrt{z\sqrt{z}})^2)\geq(x+y+z)^2.$$

Звідси й випливає шукана нерівність.

11 клас

1. Задача 10.1.

2. Добуток трьох чисел $\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}=3******1$ є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри a, b, c попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 36239651.
Розв'язання. Позначимо шуканий добуток через N. Оскільки добуток є непарним числом, то усі цифри непарні і не дорівнюють 5. Якщо перші цифри чисел будуть містити 9, то матимемо, що

$$N \ge 913\cdot 139\cdot 319 = 40483333 > 3******7,$$

таким чином серед чисел не може бути цифри 9.
Залишається переглянути два варіанти:

$$N = 713\cdot 137\cdot 371 = 36239651 \text{ та } N = 731\cdot 317\cdot 173 = 40088771.$$

Як бачимо умову задовольняє лише перше з чисел.

3. Доведіть, що при будь-якому значенні параметру a рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

(Андрій Гоголєв)

Розв'язання. Позначимо через $f(x)$ функцію, що задається лівою частиною заданого рівняння. Оскільки

$$f(0) = a - 1,\ f(-1) = 1 - a^2 + 2a - 3a^2 + a - 1 = -4a^2 + 3a,$$

тоді маємо, що

$$f(0) + f(-1) = -\left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 \le 0,$$

звідки й випливає твердження задачі.

4. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Яке найвище місце зможе наприкінці чемпіонату посісти команда, що у той момент була на 8-му місці?

(Богдан Рубльов)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	o	O	M
I	Ж	2	2	2	2	2	2	2	8	14	1
II	0	Ж	1	2	2	2	2	2	7	11	2
III	0	1	Ж	1	0	0	2	2	6	6	3–4
IV	0	0	1	Ж	1	1	0	2	5	5	5–7
V	0	0	2	1	Ж	1	1	0	3	5	5–7
VI	0	0	2	1	1	Ж	0	0	2	4	8
VII	0	0	0	2	1	2	Ж	0	1	5	5–7
VIII	0	0	0	0	2	2	2	Ж	0	6	3–4

Рис. 9

Відповідь: 3.
Розв'язання. Розглянемо ситуацію, коли вперше могла відбутися ситуація, що усі команди набрали різну кількість очок. Позначимо на цей момент кількість очок команд у порядку зайнятих місць через a_i, $i=\overline{1;8}$. Тоді очевидно, що $a_8 \ge 0$, …, $a_k \ge 8-k$, ..., $a_1 \ge 7$. Таким чином сумарно має бути набрано усіма командами разом не менше

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \geq 7 + 6 + \ldots + 1 + 0 = 28.$$

У кожному турі першості відбувається 4 ігри, а тому розігрується загалом 8 очок. Оскільки $\frac{28}{8} = 3{,}5$, то мало пройти не менше 4 турів. Нехай ми розглядаємо ситуацію рівно після 4 турів. Тоді розігране загалом 32 очки. Команда, що йде на першому місці, не може набрати більше 8 очок, тому друге – не більше 7. Таким чином маємо такі нерівності: $7 \leq a_1 \leq 8$, $6 \leq a_2 \leq 7$, …, $8 - k \leq a_k \leq 9 - k$, …, $0 \leq a_8 \leq 1$. Усі команди мали набрати різну кількість очок, нехай найбільше n, для якого справджується умова $a_n = 9 - n$. Тоді і для усіх $k = \overline{1; n}$ маємо, що $a_k = 9 - k$. Для усіх $k = \overline{n+1; 8}$ маємо $a_k = 8 - k$. Звідси $k = 4$, щоб разом усі команди набрали рівно 32 очки. Але тоді $a_8 = 0$, $a_2 = 7$, тому за 3 тури остання команда може набрати максимум 6 очок та не зможе ніяк стати другою.

Покажемо, що 3 місце вона може зайняти, набравши однакову кількість очок з командою, що йде третьою після 4 турів, ну а далі їх долю вирішуватимуть додаткові показники.

На рис. 9 зображені результати чемпіонату. Дрібним шрифтом показані результати перших 4-х турів.

5. У гострокутному нерівнобедреному трикутнику ABC проведені висоти BB_1 та CC_1, які перетинаються в точці H. Нехай L_1 та L_2 основи бісектрис трикутників B_1AC_1 та B_1HC_1, що проведені з вершин A та H відповідно. Описані кола трикутників AHL_1 та AHL_2 вдруге перетинають пряму B_1C_1 у точках P та Q відповідно. Доведіть, що точки B, C, P та Q лежать на одному колі.

(М. Плотников, Д. Хілько)

Розв'язання. Очевидно, що точки A, B_1, C_1 та H лежать на одному колі (рис. 10). Нехай W_1 та W_2 -- середини дуг C_1HB_1 та C_1AB_1 цього кола. Зрозуміло, що пряма AW_1 проходить через точку L_1, а пряма AW_2 проходить через точку L_2. Доведемо, що точка P лежить на HW_1, а точка Q -- на AW_2. Справді, припустимо, що HW_1 перетинає B_1C_1 у деякій точці P'. Тоді

$$\angle L_1PH = \angle W_1AB_1 - \angle C_1AH = \angle HAL_1,$$

тобто чотирикутник PHL_1A -- вписаний, звідки $P = P'$. Аналогічно доводиться, що точка Q лежить на AW_2. Зауважимо, що AW_1HW_2 -- прямокутник, а тому

$$\angle W_2QP = \angle L_1PH = \angle L_1AH.$$

Нехай PQ перетинає BC в точці T, M - середина BC, K -- друга точка перетину MH з описаним колом чотирикутника AB_1HC_1. Відомо, що K лежить на описаному колі ΔABC, а також на прямій AT. Тоді $TK \cdot TA = TB \cdot TC$. Достатньо тепер довести, що $TP \cdot TQ = TB \cdot TC$. Для цього доведемо, що $TK \cdot TA = TP \cdot TQ$, тобто чотирикутник $PKAQ$ є вписаним. Для цього достатньо довести, що P, K та W_2 лежать на одній прямій. Справді, за цієї умови

$$\angle TKP = \angle W_2KA = \angle W_2HA = \angle HAL_1 = \angle AQP.$$

Зазначимо також, що MB_1 та MC_1 -- дотичні до описаного кола чотирикутника AB_1HC_1. Нехай P'' -- точка перетину прямих B_1C_1 та KW_2. Оскільки KH та дотичні, що проведені до кола з діаметром AH, перетинаються в одній точці – середині сторони BC, четвірка прямих W_2H, W_2K, W_2B_1 та W_2C_1 є гармонічною. З іншого боку четвірка точок L_2, P, B_1, C_1 є гармонічною за теоремою про коло Аполонія (зауважимо, що точки L_2 та P є основами бісектрис внутрішнього та зовнішнього $\angle B_1HC_1$ трикутника B_1HC_1). Оскільки трійка прямих W_2H, W_2B_1 та W_2C_1 перетинає пряму B_1C_1 у точках L_2, B_1, C_1 відповідно, то точки P та P'' співпадають.

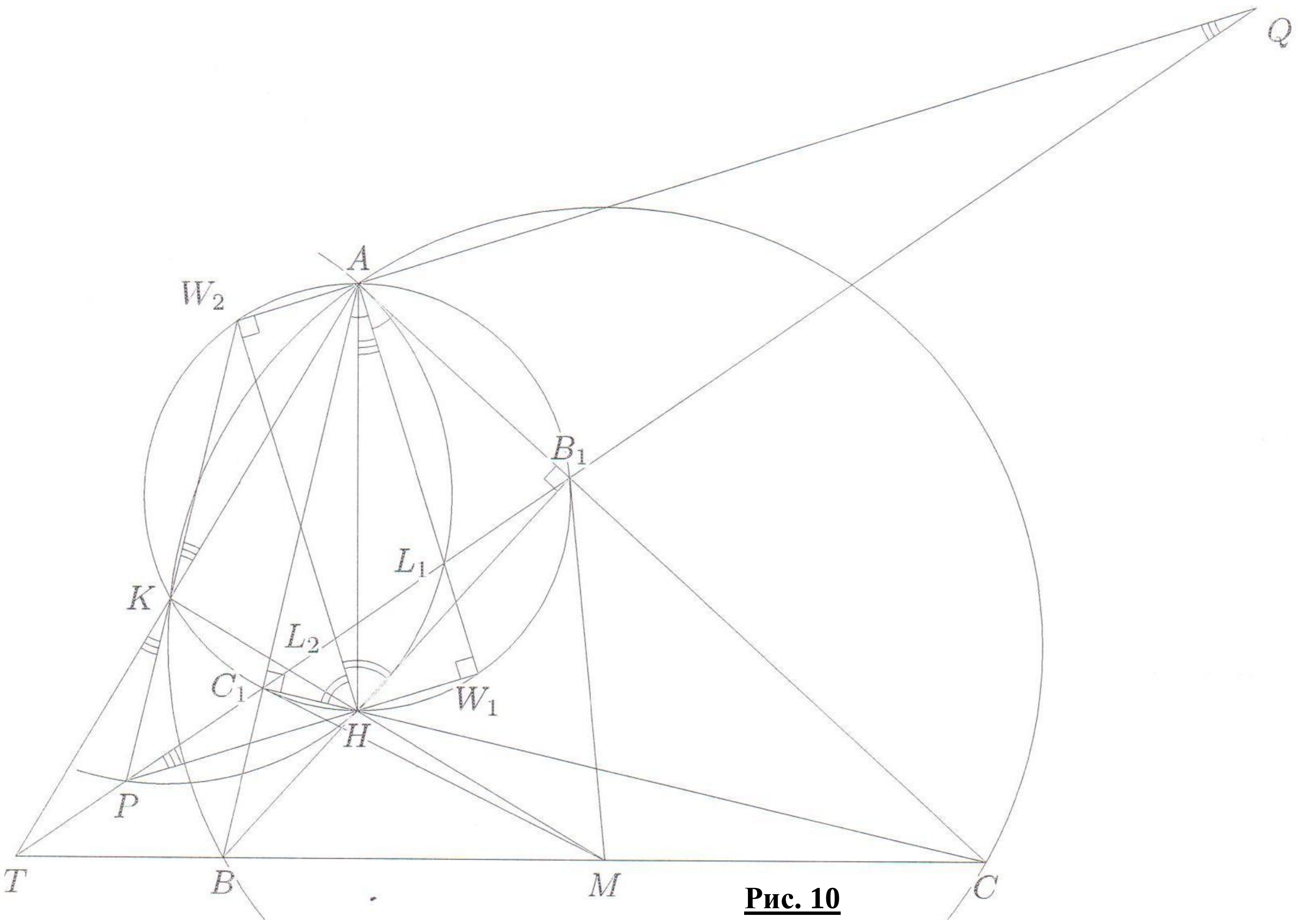

Рис. 10

4.1. У футбольному чемпіонаті грали n команд в одне коло, тобто кожна команда з кожною зіграла рівно 1 раз. За пермогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. За підсумками чемпіонату виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок, при цьому у команд, що посіли сусідні місця, набрані очки відрізняються рівно на 1. Скільки мінімум очок могла набрати команда, що посіла останнє місце і при якому найменшому n це могло відбутися.

(Богдан Рубльов)

	А	Б	В	Г	Очки
А	XX	3	1	1	**5**
Б	0	XX	1	3	**4**
В	1	1	XX	1	**3**
Г	1	0	1	XX	**2**

Рис.11

Відповідь: 2 очки та 4 команди.

Розв'язання. Позначимо через n -- кількість команд. Усього ігор було зігране $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Тоді разом команди можуть набрати мінімум $S_{\min} = 2N = n(n-1)$ очок (усі зустрічі завершилися внічию), максимум $S_{\max} = 3N = \frac{3n(n-1)}{2}$ очок (нічиїх взагалі не було). Нехай команди набрали $k, k+1, \dots, k+n-1$ очок, тобто $S = k + (k+1) + \ldots + (k+n-1) = \frac{(2k+n-1)n}{2}$. Тоді можемо записати таки оцінки, очевидно, що найбільші та найменші значення не досягаються.

$$\frac{2n(n-1)}{2} < \frac{(2k+n-1)n}{2} < \frac{3n(n-1)}{2} \Rightarrow 2n-2 < 2k+n-1 < 3n-3 \Rightarrow n-1 < 2k < 2n-2.$$

Покажемо, що найменші значення для $k = 0; 1$ не можливі.
При $k = 0$, маємо, що $n < 1$ -- суперечність.
При $k = 1$, маємо, що $2 < n < 3$ -- суперечність.
При $k = 2$, маємо, що $3 < n < 5$, тобто $n = 4$.
Таким чином команди мають набрати $2; 3; 4; 5$ очок.
На рис. 11 показане, що такий варіант можливий.

5.1. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD. Коло k проходить через вершину A та дотикається до сторони BC у точці D. Доведіть, що описане коло ΔABC дотикається до кола k у точці A.

Розв'язання. Позначимо центри описаного кола та кола k чебрез O та P відповідно (рис. 12). Позначимо стандартним чином кути ΔABC через α, β та γ. Без обмеження загальності вважаємо, що $\gamma \ge \beta$. Оскільки AD -- бісектриса, то

$$\angle ADB = 180° - \beta - \tfrac{1}{2}\alpha \ge 90°,\ \angle ADC = 180° - \gamma - \tfrac{1}{2}\alpha \le 90°.$$

Оскільки $AP = PD$, то

$$\angle PAD = \angle ADP = \angle ADP - \angle ADB - \angle PDB = \angle ADP - 90° = 90° - \beta - \tfrac{1}{2}\alpha \Rightarrow$$
$$\angle PAC = \angle CAD + \angle DAP = 90° - \beta.$$

З іншого боку

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle CAO = \tfrac{1}{2}(180° - \angle AOC) = 90° - \beta = \angle CAP.$$

Таким чином точки A, O та P лежать на одній прямій. Але це означає, що дотична до кола k у точці A перпендикулярна AP, а тому вона перпендикулярна AO, а це означає, що ця дотична перпендикулярна радіусу OA, а тому є дотичною і до описаного кола ΔABC. Звіди й випливає твердження задачі.

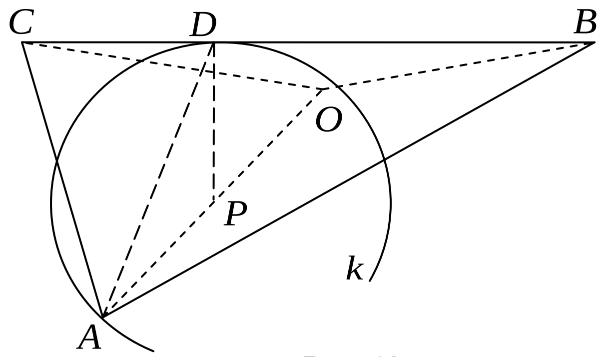

Рис. 12